

Linear Algebra

[KOMS120301] - 2023/2024

13.2 - Jenis Transformasi Linier

Dewi Sintiar

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 13 (November 2023)

Setelah perkuliahan ini, Anda diharapkan mampu:

- 1 menjelaskan konsep berbagai jenis transformasi linier antar vektor dalam ruang vektor;
- 2 melakukan transformasi linier (refleksi, proyeksi, rotasi, dilatasi, ekspansi, geser) pada suatu vektor dalam ruang vektor.

Transformasi Matriks Dasar di \mathbb{R}^2 dan \mathbb{R}^3

(page 259 of Elementary LA Applications book)

1. Refleksi

Operator refleksi pada \mathbb{R}^2

Operator refleksi adalah operator pada \mathbb{R}^2 (atau \mathbb{R}^3) yang memetakan setiap titik ke dalam gambar simetrisnya terhadap garis atau bidang yang memuat titik asal.

Operator	Illustration	Images of e_1 and e_2	Standard Matrix
Reflection about the x -axis $T(x, y) = (x, -y)$		$T(e_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1) = (0, -1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflection about the y -axis $T(x, y) = (-x, y)$		$T(e_1) = T(1, 0) = (-1, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflection about the line $y = x$ $T(x, y) = (y, x)$		$T(e_1) = T(1, 0) = (0, 1)$ $T(e_2) = T(0, 1) = (1, 0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Operator refleksi pada \mathbb{R}^3

Operator	Illustration	Images of e_1, e_2, e_3	Standard Matrix
<p>Reflection about the xy-plane</p> <p>$T(x, y, z) = (x, y, -z)$</p>		<p>$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$</p> <p>$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$</p> <p>$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$</p>	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
<p>Reflection about the xz-plane</p> <p>$T(x, y, z) = (x, -y, z)$</p>		<p>$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$</p> <p>$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$</p> <p>$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$</p>	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
<p>Reflection about the yz-plane</p> <p>$T(x, y, z) = (-x, y, z)$</p>		<p>$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$</p> <p>$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$</p> <p>$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$</p>	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Proyeksi

Operator proyeksi pada \mathbb{R}^2

Operator proyeksi atau **operator proyeksi ortogonal** adalah operator matriks pada \mathbb{R}^2 (atau \mathbb{R}^3) yang memetakan setiap titik ke dalam proyeksi ortogonalnya ke garis tetap atau bidang yang melalui titik asal.

Operator	Illustration	Images of e_1 and e_2	Standard Matrix
Orthogonal projection onto the x -axis $T(x, y) = (x, 0)$		$T(e_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1) = (0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection onto the y -axis $T(x, y) = (0, y)$		$T(e_1) = T(1, 0) = (0, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operator proyeksi pada \mathbb{R}^3

Operator	Illustration	Images of $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Standard Matrix
<p>Orthogonal projection onto the xy-plane</p> <p>$T(x, y, z) = (x, y, 0)$</p>		<p>$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$</p> <p>$T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$</p> <p>$T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$</p>	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
<p>Orthogonal projection onto the xz-plane</p> <p>$T(x, y, z) = (x, 0, z)$</p>		<p>$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$</p> <p>$T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$</p> <p>$T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$</p>	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
<p>Orthogonal projection onto the yz-plane</p> <p>$T(x, y, z) = (0, y, z)$</p>		<p>$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$</p> <p>$T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$</p> <p>$T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Untuk memahami proyeksi pada \mathbb{R}^3 dengan lebih baik, Anda dapat menyimak video ini.

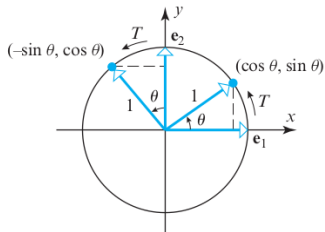
<https://www.youtube.com/watch?v=RxRwK81CVew>

3. Rotasi

Operator rotasi pada \mathbb{R}^2

Operator rotasi adalah operator matriks pada \mathbb{R}^2 atau \mathbb{R}^3 yang memindahkan titik sepanjang busur lingkaran yang berpusat di asal.

Cara mencari matriks standar untuk operator rotasi $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yang memindahkan titik berlawanan arah jarum jam di sekitar titik asal melalui sudut positif θ ?



$$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{and} \quad T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

Matriks transformasi standar untuk T adalah:

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Konversi dari $^\circ$ ke rad

- $180^\circ = 1\pi$ rad
- $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad

Operator rotasi pada \mathbb{R}^2 (*cont.*)

Matriks:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

disebut **matriks rotasi** untuk \mathbb{R}^2 .

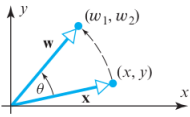
Misalkan $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ menjadi bayangannya saat diputar.
Kemudian:

$$\mathbf{w} = R_\theta \mathbf{x}$$

with:

$$w_1 = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$w_2 = x \sin \theta + y \cos \theta$$

Operator	Illustration	Rotation Equations	Standard Matrix
Counterclockwise rotation about the origin through an angle θ		$\begin{aligned} w_1 &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ w_2 &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

Contoh: operator rotasi

Carilah bayangan $\mathbf{x} = (1, 1)$ dengan rotasi $\pi/6$ rad ($= 30^\circ$) terhadap titik asal.

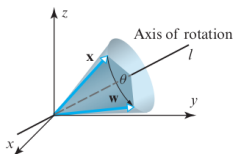
Solusi:

Kita tahu bahwa $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$ dan $\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

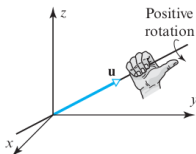
Dari formula sebelumnya:

$$R_{\pi/6}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.37 \\ 1.37 \end{bmatrix}$$

Rotasi dalam \mathbb{R}^3 umumnya digambarkan sebagai **sumbu rotasi** dan vektor satuan \mathbf{u} di sepanjang garis tersebut.



(a) Angle of rotation



(b) Right-hand rule

Aturan tangan kanan digunakan untuk menentukan tanda sudut rotasi.

- Jika sumbunya adalah sumbu x , y , atau z , maka ambillah vektor satuan \mathbf{i} , \mathbf{j} , dan \mathbf{k} .
- Sudut rotasi akan menjadi *positif* jika berlawanan arah jarum jam menghadap ke titik asal sepanjang sumbu koordinat positif dan akan menjadi *negatif* jika searah jarum jam.

Operator	Illustration	Rotation Equations	Standard Matrix
Counterclockwise rotation about the positive x -axis through an angle θ		$w_1 = x$ $w_2 = y \cos \theta - z \sin \theta$ $w_3 = y \sin \theta + z \cos \theta$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$
Counterclockwise rotation about the positive y -axis through an angle θ		$w_1 = x \cos \theta + z \sin \theta$ $w_2 = y$ $w_3 = -x \sin \theta + z \cos \theta$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$
Counterclockwise rotation about the positive z -axis through an angle θ		$w_1 = x \cos \theta - y \sin \theta$ $w_2 = x \sin \theta + y \cos \theta$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Dilatasi dan kontraksi

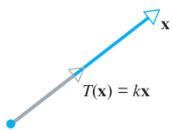
Dilatasi dan kontraksi

Misalkan $k \in \mathbb{R}, k \geq 0$. Operatornya:

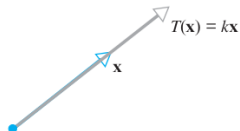
$$T(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$$

pada \mathbb{R}^2 atau \mathbb{R}^3 mendefinisikan penambahan atau pengurangan panjang vektor \mathbf{x} dengan faktor k .

- Jika $k > 1$, disebut dilatasi dengan faktor k ;
- Jika $0 \leq k \leq 1$, maka disebut kontraksi dengan faktor k .

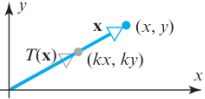
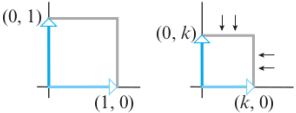
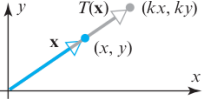
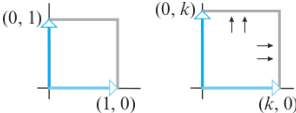


(a) $0 \leq k < 1$

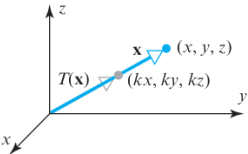
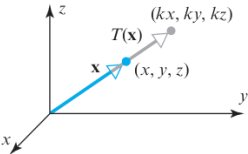


(b) $k > 1$

Dilatasi & kontraksi di \mathbb{R}^2

Operator	Illustration $T(x, y) = (kx, ky)$	Effect on the Unit Square	Standard Matrix
Contraction with factor k in \mathbb{R}^2 $(0 \leq k < 1)$			$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Dilation with factor k in \mathbb{R}^2 $(k > 1)$			

Dilatasi & kontraksi di \mathbb{R}^3

Operator	Illustration $T(x, y, z) = (kx, ky, kz)$	Standard Matrix
Contraction with factor k in R^3 $(0 \leq k < 1)$		$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
Dilation with factor k in R^3 $(k > 1)$		

5. Ekspansi dan kompresi

Dalam dilatasi atau kontraksi \mathbb{R}^2 atau \mathbb{R}^3 , **semua koordinat** dikalikan dengan faktor non-negatif k .

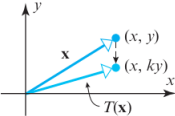
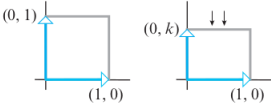
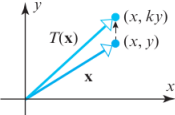
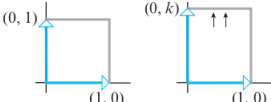
Sekarang bagaimana jika **hanya satu koordinat** dikalikan dengan k ?

- Jika $k > 1$, disebut **ekspansi dengan faktor k searah sumbu koordinat (x , y , atau z)**;
- Jika $0 \leq k \leq 1$, disebut **kompresi**

Ekspansi dan kompresi in \mathbb{R}^2 (pada arah x)

Operator	Illustration $T(x, y) = (kx, y)$	Effect on the Unit Square	Standard Matrix
Compression in the x -direction with factor k in \mathbb{R}^2 $(0 \leq k < 1)$			$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Expansion in the x -direction with factor k in \mathbb{R}^2 $(k > 1)$			

Ekspansi dan kompresi in \mathbb{R}^2 (pada arah y)

Operator	Illustration $T(x, y) = (x, ky)$	Effect on the Unit Square	Standard Matrix
Compression in the y -direction with factor k in \mathbb{R}^2 $(0 \leq k < 1)$			$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Expansion in the y -direction with factor k in \mathbb{R}^2 $(k > 1)$			

6. Shear

Operator matriks berbentuk:

$$T(x, y) = (x + ky, y)$$

menerjemahkan titik (x, y) pada bidang xy yang sejajar dengan sumbu x dengan jumlah ky yang sebanding dengan koordinat y titik tersebut.

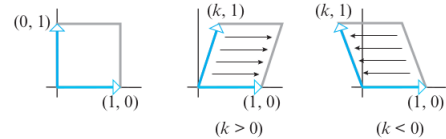
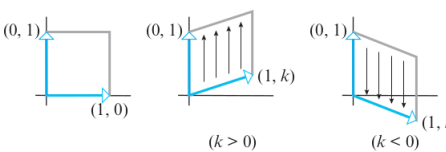
Ini disebut **geser ke arah x dengan faktor k** .

Demikian pula, operator matriks:

$$T(x, y) = (x, y + kx)$$

disebut **geser ke arah y dengan faktor k** .

Jika $k > 0$, maka gesernya ke arah positif. Ketika $k < 0$, arahnya negatif.

Operator	Effect on the Unit Square	Standard Matrix
<p>Shear in the x-direction by a factor k in R^2</p> <p>$T(x, y) = (x + ky, y)$</p>		$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
<p>Shear in the y-direction by a factor k in R^2</p> <p>$T(x, y) = (x, y + kx)$</p>		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

Jelaskan operator matriks yang matriks standarnya sebagai berikut:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

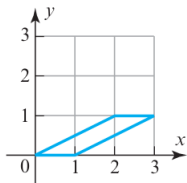
Solusi:

Dari tabel pada slide sebelumnya kita dapat melihat bahwa:

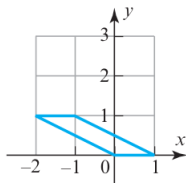
- A_1 berhubungan dengan pergeseran ke arah x dengan faktor 2;
- A_2 berhubungan dengan pergeseran ke arah x dengan faktor -2;
- A_3 berhubungan dengan pelebaran dengan faktor 2;
- A_4 berhubungan dengan perluasan ke arah x dengan faktor 2.

Contoh (cont.)

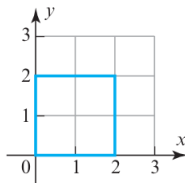
Jelaskan secara geometris hasil transformasinya:



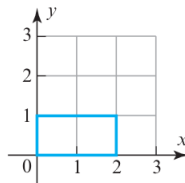
A_1



A_2



A_3



A_4

bersambung..